MATHEMATICS SOLUTIONS

61. (*c*) माना $y = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)}$

⇒ $y(x-c) = x^2-(a+b)x+ab$

⇒ $x^2-(a+b+y)x+ab+cy=0$

अब, $D=(a+b+y)^2-4(ab+cy)$

$=y^2+2y(a+b-2c)+(a-b)^2$

चूँकि x वास्तविक है तथा y के मान वास्तविक हैं, तब $D\ge 0, \forall y\in R$ द्विघात समीकरण में y का चिह्न पहले पद की भाँति ही है यदि $B^2-4AC<0$

⇒ $4(a+b-2c)^2-4(a-b)^2<0$

⇒ $4(a+b-2c+a-b)(a+b-2ca+b)<0$

⇒ $16(a-c)(b-c)<0$

⇒ $16(a-c)(c-b)=$ ऋणात्मक

∴ a व b के बीच c स्थित है अर्थात् $a<c<b$ ...(i)

जहाँ, $a<b$ परन्तु यदि $b<a$, तब उपरोक्त प्रतिबन्ध निम्न होगा

$a>c>b$ ...(ii)

अतः समी (i) व (ii) से स्पष्ट है कि विकल्प (d) सही है।

62. (*c*) माना दी गई समीकरण के मूल α व β हैं।

$$x^2+(2+\lambda)x-\frac{1}{2}(1+\lambda)=0$$

⇒ $\alpha+\beta=-(2+\lambda)$ तथा $\alpha\beta=-\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)$

अब, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

⇒ $\alpha^2+\beta^2=[-(2+\lambda)]^2+2\frac{(1+\lambda)}{2}$

⇒ $\alpha^2+\beta^2=\lambda^2+4+4\lambda+1+\lambda=\lambda^2+5\lambda+5$

इसका मान न्यूनतम होगा, यदि $\lambda=\frac{1}{2}$

63. (*c*) हम जानते हैं कि $ax^2+bx+c\ge 0$, यदि $a>0$ तथा $b^2-4ac\le 0$

अब, $mx-1+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow \frac{mx^2-x+1}{x}\ge 0$

⇒ $mx^2-x+1\ge 0$ तथा $x>0$

अब, $mx^2-x+1\ge 0$ यदि $m>0$ तथा $1-4m\le 0$ या यदि $m>0$ तथा $m\ge\frac{1}{4}$

अतः m का निम्निष्ठ मान $\frac{1}{4}$ है।

64. (*c*) मूल वास्तविक होने के लिए $D\ge 0$

⇒ $q^2-4p\ge 0\Rightarrow q^2\ge 4p$

$p=1$ के लिए, $q^2\ge 4\Rightarrow q=2,3,4$

$p=2$ के लिए, $q^2\ge 8\Rightarrow q=3,4$

$p=3$ के लिए, $q^2\ge 12\Rightarrow q=4$

$p=4$ के लिए, $q^2\ge 16\Rightarrow q=4$

अतः कुल सात हल सम्भव हैं।

65. (*a*) चूँकि समीकरणों $ax^2+2bx+c=0$ व $px^2+2qx+r=0$ के मूल क्रमशः α,β व γ,δ हैं, तब

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}, \gamma+\delta=-\frac{2q}{p}, \gamma\delta=\frac{r}{p}$$

∵ α,β,γ व δ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

∴ $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ ...(i)

परन्तु $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}=\frac{pc}{ar}\Rightarrow\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2=\frac{pc}{ar}$ [समी (i)से]

तथा $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\beta}{\delta}$

⇒ $\frac{bp}{aq}=\sqrt{\frac{pc}{ar}}\Rightarrow\frac{b^2p^2}{a^2q^2}=\frac{pc}{ar}\Rightarrow q^2ac=b^2pr$

66. (*c*) चूँकि समीकरणों $ax^2+bx+c=0$ व $Ax^2+Bx+C=0$ के मूल क्रमशः α,β व $\alpha-k,\beta-k$ हैं।

⇒ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$

तथा $\alpha+\beta-2k=-\frac{B}{A}, (\alpha-k)(\beta-k=\frac{C}{A}$

अब, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{(b^2-4ac)}{a^2}$ ...(i)

तथा $\{(\alpha-k)-(\beta-k)\}^2=\{(a-k)+(\beta-k)\}^2-4(\alpha-k)(\beta-k)$

$=\left(-\frac{B}{A}\right)^2-4\left(\frac{C}{A}\right)=\frac{B^2-4AC}{A^2}$ ...(ii)

समी (i) व (ii) से,

$$\frac{(b^2-4ac)}{a^2}=\frac{B^2-4AC}{A^2}$$

∴ $\frac{B^2-4AC}{b^2-4ac}=\left(\frac{A}{a}\right)^2$

67. (*d*) चूँकि दी गई समीकरण के मूल α व β हैं।

माना $f(x)=a^2x^2+2bx+2c=0$

तब, $f(\alpha)=a^2\alpha^2+2b\alpha+2c=0$

$=a^2\alpha^2+2(b\alpha+c)=a^2\alpha^2-2a^2\alpha^2$

$=-a^2\alpha^2=$ ऋणात्मक

तथा $f(\beta)=a^2\beta^2+2(b\beta+c)=a^2\beta^2+2a^2\beta^2$

$=3a^2\beta^2=$ धनात्मक

चूँकि $f(\alpha)$ व $f(\beta)$ विपरीत चिह्न के हैं, इसलिए समीकरण सिद्धान्त से समीकरण $f(x)=0$ का एक मूल γ, α व β के बीच होगा अर्थात् $\alpha<\gamma<\beta$

68. (*d*) चूँकि, $y^2-y+a=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}$ तथा $-\sqrt{2}\le\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$, दी गई समीकरण के पास y के किसी भी मान के लिए x का कोई भी वास्तविक मान नहीं होगा। यदि

$$a-\frac{1}{4}>\sqrt{2}$$

अतः $a\in\left(\sqrt{2}+\frac{1}{4},\infty\right)$

⇒ $a\in(\sqrt{3},\infty)\left(\because\sqrt{2}+\frac{1}{4}<\sqrt{3}\right)$

69. (*b*) माना समीकरण $x^2-ax+b=0$ के मूल α व β हैं।

∴ $\alpha+\beta=a$ ...(i)

तथा $\alpha\beta=b$ ...(ii)

मूल अभाज्य संख्याएँ हैं। इसलिए स्पष्टतः b अभाज्य संख्या नहीं होगी क्योंकि यह दो अभाज्य संख्याओं का गुणनफल है। दो अभाज्य संख्याओं का योग एक दशा के अतिरिक्त सभी में सम संख्या होता है। a अभाज्य संख्या या भाज्य संख्या हो सकता है।

अब, $1+a+b=1+\alpha\beta+\alpha+\beta=(1+\alpha)(1+\beta)$

$(1+\alpha),(1+\beta)$ भाज्य या अभाज्य संख्याएँ हो सकती हैं। इसलिए $1+a+b$ निश्चित नहीं है।

70. (*b*) माना समीकरणों $x^2+b_1x+c_1=0$ तथा $x^2+b_2x+c_2=0$ के विविक्तकर D_1 व D_2 है।

$D_1+D_2=b_1^2-4c_1+b_2^2-4c_2$

$=(b_1^2+b_2^2)-4(c_1+c_2)$

$=b_1^2+b_2^2-2b_1b_2$ [∵ $b_1b_2=2(c_1+c_2)$]

$=(b_1-b_2)^2\ge 0$

⇒ $D_1\ge 0$ या $D_2\ge 0$

⇒ D_1 व D_2 दोनों धनात्मक हैं।

71. (c) $(x-1)(x^2-5x+7) < (x-1)$

$$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2-5x+6) < 0$$
$$\Rightarrow \quad (x-1)(x-2)(x-3) < 0$$
$$\therefore \quad x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$$

72. (c) $x^2 - 3|x| + 2 < 0$

$$\Rightarrow \quad |x|^2 - 3|x| + 2 < 0$$
$$\Rightarrow \quad (|x|-1)(|x|-2) < 0$$
$$\Rightarrow \quad 1 < |x| < 2$$
$$\Rightarrow \quad -2 < x < -1 \text{ या } 1 < x < 2$$
$$\therefore \quad x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$$

73. (b) दिया है, ${}^5P_r = 2\ {}^6P_{r-1}$

$$\frac{5!}{(5-r)!} = 2 \times \frac{6!}{(6-r+1)!} \qquad \left\{\because {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}\right\}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{5!}{(5-r)!} = 2 \times \frac{6 \times 5!}{(7-r)!}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(5-r)!} = \frac{12}{(7-r)(6-r)(5-r)!}$$
$$\Rightarrow \quad (7-r)(6-r) = 12$$
$$\Rightarrow \quad 42 - 7r - 6r + r^2 = 12$$
$$\Rightarrow \quad r^2 - 13r + 30 = 0$$
$$\Rightarrow \quad r^2 - 10r - 3r + 30 = 0$$
$$\Rightarrow \quad r(r-10) - 3(r-10) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (r-10)(r-3) = 0$$

$r = 10, 3$ यहाँ, $r = 10$ अमान्य है चूँकि $0 \le r \le 5$

अतः $r = 3$

74. (a) शब्द PERMUTATIONS में अक्षर निम्न प्रकार आए हुए हैं

P — 1 बार
E — 1 बार
R — 1 बार
M — 1 बार
U — 1 बार
T — 2 बार
A — 1 बार
I — 1 बार
O — 1 बार
N — 1 बार
S — 1 बार

(i) शब्द जिनका प्रारम्भ P से तथा अन्त S से हो अर्थात्

$\boxed{P}\square..\square..\square..\square..\square..\square..\square..\square..\square..\square..\square..\boxed{S}$

प्रथम तथा अन्तिम स्थान क्रमशः P तथा S से भरे जाएँगे, तब बचे हुए 10 स्थान भरे जाने के तरीकों की संख्या $= \dfrac{10!}{2!}$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$
$$= 720 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$$
$$= 720 \times 2520 = 1814400$$

75. (c) अभीष्ट तरीके $= \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{5!}{2!3!} = 60$

76. (a) संख्या सम होगी यदि इकाई का अंक 2, 4, 6 या 8 हो अर्थात् अन्तिम अंक (इकाई का अंक) 4 तरीकों से भरा जा सकता है तथा शेष अंकों को ${}^8P_2$ तरीकों से भरा जा सकता है

तीन भिन्न अंकों वाली संख्याओं की संख्या $= {}^8P_2 \times 4 = 224$

77. (c) 9 अलग-अलग अंकों से, 9 अंक की कुल बनी संख्या $= 9 \times {}^9P_8$

$$= \frac{9 \times 9!}{1!} = 9 \times 9!$$

78. (b) ARTICLE शब्द में AEI स्वर तथा C, L, R, T व्यंजन हैं। सात अक्षरों के शब्द में तीन सम स्थान हैं जिसमें 3 स्वर 31 तरीकों से भरा जा सकता है। शेष चार स्थानों में चार व्यंजन 4! तरीकों से भरा जा सकता है।

$\therefore$ अभीष्ट तरीकों की संख्या $= 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

79. (a) दो महिलाएँ 1 से 4 कुर्सियों को ${}^4P_2$ तरीके से भर सकती हैं तथा 3 पुरुष शेष कुर्सियों को ${}^6P_3$ तरीके से भर सकता है।

$$\therefore \quad \text{अभीष्ट तरीके} = {}^4P_2 \times {}^6P_3$$
$$= 12 \times 120$$
$$= 1440$$

80. (c) शब्द RACHIT में A, C, H, I से प्रारम्भ होने वाले शब्दों की संख्या 6! है तथा अलग शब्द RACHIT है।

$\therefore$ अभीष्ट शब्दों की संख्या $= 4 \times 5! + 1$

$$= 4 \times 120 + 1$$
$$= 480 + 1 = 481$$

81. (c) शब्द TRIANGLE में स्वर (A, E, I) तथा व्यंजन (G, L, N, R, T) है। सबसे पहले व्यंजन को अलग-अलग जगहों पर स्थिर करने के तरीके $= 5!$ शेष जगहों को तीन स्वरों द्वारा ${}^6P_3$ तरीके से भरा जा सकता है।

$\therefore$ कुल शब्दों की संख्या $= 5! \times {}^6P_3$

$= 120 \times 6 \times 5 \times 4 = 14400$ तरीके

82. (c) कुल अंकों की संख्या $= 4$

$\therefore$ चार अंकों की कुल संख्याएँ

$$= {}^4P_4 = 4!$$
$$= 24$$

83. (b) कुल बनी संख्याओं के इकाई के अंकों का योग

$$= 3!(3 + 4 + 5 + 6)$$
$$= 6 \times 18 = 108$$

84. (b) दिया है, $|z + 4| \le 3 \Rightarrow -3 \le z + 4 \le 3$

$$\Rightarrow \quad -6 \le z + 1 \le 0$$
$$\Rightarrow \quad 0 \le -(z+1) \le 6$$
$$\Rightarrow \quad 0 \le |z+1| \le 6$$

अतः $|z + 1|$ के उच्चतम तथा निम्नतम मान क्रमशः 6 तथा 0 हैं।

85. (a) हम जानते हैं कि, $|-z| = |z|$

तथा $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

अब, $|z| + |z-1| = |z| + |1-z|$

$$\ge |z + (1-z)| = |1| = 1$$

अतः $|z| + |z-1|$ का निम्नतम मान 1 है

86. (d) हम जानते हैं कि $|z + a| \le a$ निरूपित करता है कि z, a त्रिज्या वाले तथा $(-a, 0)$ केन्द्र वाले वृत्त पर या वृत्त के अन्दर स्थित है, तब

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| \le 14$$

87. (b) $\left|z + \dfrac{2}{z}\right| = 2 \Rightarrow |z| - \dfrac{2}{|z|} \le 2$

$$\Rightarrow \quad |z|^2 - 2|z| - 2 \le 0$$

जो $|z|$ में द्विघात समीकरण है

$$\therefore \quad |z| \le \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} \le 1 \pm \sqrt{3}$$

अतः $|z|$ का उच्चतम मान $1 + \sqrt{3}$ है।

88. (c) दिया है, $|z_1 - 1| < 1$

$\Rightarrow$ $|z_1| - |1| < 1$ ($\because$ त्रिभुजीय असमिका के अनुसार)

$\Rightarrow$ $|z_1| < 2$ ...(i)

इसी प्रकार, $|z_2 - 2| < 2$

$\Rightarrow$ $|z_2| < 4$ ...(ii)

तथा $|z_3 - 3| < 3$

$\Rightarrow$ $|z_3| < 6$ ...(iii)

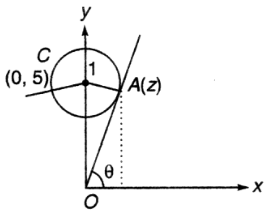
$\Rightarrow$ $|z_1| + |z_2| + |z_3| < 12$ ...(iv)

त्रिभुजीय असमिका का प्रयोग करने पर,

$$|z_1 + z_2 + z_3| \le |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

$\Rightarrow$ $|z_1 + z_2 + z_3| < 12$ [समी (iv) से]

89. (a) दिया है, $OC = 5$ तथा $CA = 1$



स्पष्टतः बिन्दु z इस प्रकार है कि मूलबिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखा और वृत्त के स्पर्श बिन्दु के कोणांक का मान न्यूनतम है।

माना $\theta = \angle AOX$, तब $\angle AOC = 90° - \theta$

चित्र से, $\sin \angle AOC = \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow$ $\sin(90° - \theta) = \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow$ $\cos\theta = \dfrac{1}{5}$

अब, $OA = \sqrt{OC^2 - CA^2}$

$= \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24}$

अब, A के निर्देशांक $(\sqrt{24}\cos\theta, \sqrt{24}\sin\theta)$ हैं

अर्थात् $\left(\dfrac{\sqrt{24}}{5}, \dfrac{24}{5}\right)$

अतः $z = \dfrac{2\sqrt{6}}{5} + i\dfrac{24}{5}$

90. (d) $\dfrac{4(\cos 75° + i\sin 75°)}{0.4(\cos 30° + i\sin 30°)}$

$= 10(\cos 75° + i\sin 75°)(\cos 30° - i\sin 30°)$

$= 10e^{75i} \cdot e^{-30i} = 10e^{45i}$

$= 10(\cos 45° + i\sin 45°) = \dfrac{10}{\sqrt{2}}(1 + i)$